

玻尔兹曼常数实验数据处理方法

董海宽

(渤海大学 物理系, 辽宁 锦州 121013)

摘要: 本文通过PN结的电流电压的特性关系, 采用线性回归、乘幂回归、指数回归三种拟合方法确定了电流与电压间的指数关系, 从而精确计算了玻尔兹曼常数。并着重介绍应用Excel软件对玻尔兹曼常数测定实验的数据分析处理方法。使复杂的计算过程及抽象的实验现象变得简单且直观。

关键词: 玻尔兹曼常数; 数据处理; 线性回归; Microsoft Excel

中图分类号: O47 **文献标识码:** B **文章编号:** 1673-0569(2008)04-0372-05

玻尔兹曼常数(k)是反映物质世界不连续特性的重要标志之一, 精确测量 k 值具有十分重要的意义。利用PN结物理特性测量仪, 测量扩散电流和电压, 由PN结扩散电流与电压的关系可较精确的推算出 k 值。

1 实验原理

由半导体物理学可知, PN结正向电流—电压关系^[1]为:

$$I = I_0[\exp(eU/kT) - 1] \quad (1)$$

式(1)中 I 是通过PN结电流, I_0 是不随电压变化的常数, T 是热力学温度, e 是电子电量, $e = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{C}$, U 为正向压降约为十分之几伏, 则 $\exp(eU/kT) \gg 1$, (1)式括号内 -1 项完全可以忽略, 于是有

$$I = I_0 \exp(eU/kT) \quad (2)$$

也即PN结正向电流随正向电压按指数规律变化。若测得PN结 $I-U$ 关系, 则利用(2)式可以求出 e/kT 。在测得温度 T 后, 就可以得到 e/k 常数, 把电子量作为已知代入, 即可求得玻尔兹曼常数 k 。

本实验选取性能良好的硅三极管(TIP31型), 并采用LF356(高输入阻抗集成运算放大器)组成电流—电压变换器(弱电流放大器)测量弱电流, 具有输入阻抗小、灵敏度高的优点。

2 实验数据分析处理

在环境温度分别为 $t_1 = 18.0^\circ\text{C}$ ($T_1 = 291.15 \text{K}$)、 $t_2 = 72.0^\circ\text{C}$ ($T_2 = 345.15 \text{K}$)两个条件下分别调整结电压 U_1 , 在三极管放大区测得 U_2 , 测10多数据点, 至 U_2 值达到饱和时, 结束测量。测量结果如图1、图2所示。

2.1 数据曲线拟合

以 U_1 为自变量, U_2 作因变量, 将实验数据分别代入线性回归^[2]($U_2 = a + bU_1$)、乘幂回归($U_2 = aU_1^b$)、指数回归($U_2 = a \exp(bU_1)$)这三种常用的基本函数, 求出各函数相应的 a 和 b 值, 得出三种函数式。

收稿日期: 2008-10-15.

作者简介: 董海宽(1981-), 男, 助理实验师, 从事大学物理实验研究工作.

表1 T = 291.15K 时数据处理表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	波尔兹曼常数测定实验数据处理								
2	实验数据		线性回归		乘幂回归 $U_2 = aU_1^k$		指数回归 $U_2 = a \exp(bU_1)$		
3	$T_1 = 345.15K$		$U_2 = a + bU_1$		$(\ln U_2 = a + b * \ln U_1)$		$(\ln U_2 = a + b * U_1)$		
4		U_1/V	U_2/V	$U_2 * /V$	$\ln U_1$	$\ln U_2$	$U_2 * /V$	$\ln U_2$	$U_2 * /V$
5	1	0.19	0.135	-1.698	-1.661	-2.002	0.112	-2.002	0.134
6	2	0.2	0.168	-1.032	-1.609	-1.671	0.173	-1.671	0.188
7	3	0.21	0.26	-0.365	-1.561	-1.347	0.260	-1.347	0.263
8	4	0.22	0.369	0.301	-1.514	-0.997	0.385	-0.997	0.368
9	5	0.23	0.51	0.967	-1.470	-0.673	0.539	-0.673	0.516
10	6	0.24	0.72	1.623	-1.427	-0.329	0.800	-0.329	0.722
11	7	0.25	1.025	2.299	-1.386	0.025	1.127	0.025	1.011
12	8	0.26	1.408	2.265	-1.347	0.342	1.568	0.342	1.415
13	9	0.27	1.998	3.631	-1.309	0.692	2.153	0.692	1.981
14	10	0.28	2.768	4.297	-1.273	1.018	2.923	1.018	2.773
15	11	0.29	3.9	4.963	-1.238	1.361	3.926	1.361	3.882
16	12	0.3	5.54	5.630	-1.204	1.712	5.220	1.712	5.434
17	13	0.31	7.602	6.296	-1.171	2.028	6.8771	2.028	7.608
18	14	0.32	10.426	6.962	-1.139	2.344	8.9811	2.344	10.651
19		r		0.87738844		0.99751818		0.999971777	
20		a		-14.35378681		1.30E + 05		2.25E - 04	
21		b		66.61120879		8.406882135		33.64375615	
22		k				1.37959e-23			

a. 对于线性回归:由最小二乘法可得

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad a = U_2 - bU_1$$

$$b = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{xy}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad \text{即} \quad b = \frac{U_1 \cdot U_2 - U_1 U_2}{U_1^2 - U_1^2} \quad (3)$$

为了确定用线性关系拟合是否合理,在回归系数确定后,还需要计算相关系数。相关系数定义^[3]为:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)(\bar{y}^2 - \bar{y}^2)}} \quad (4)$$

$$\text{即} \quad r = \frac{U_1 U_2 - U_1 \cdot U_2}{\sqrt{(U_1^2 - U_1^2)(U_2^2 - U_2^2)}} \quad (5)$$

可以证明 r 的值总是在 0 和 1 之间,值越接近 1,说明函数拟合得越好。

b. 对于乘幂回归: $U_2 = aU_1^k$ 取自然对数转换为线性函数得,

$$\ln U_2 = \ln a + k \ln U_1 \quad (6)$$

由(3)(4)式可得

$$a = \exp(\ln U_2 - k \ln U_1)$$

$$b = \frac{\ln U_1 \cdot \ln U_2 - \ln U_1 \ln U_2}{\ln U_1^2 - \ln U_1^2} \quad (7)$$

$$r = \frac{\ln U_1 \ln U_2 - \ln U_1 \cdot \ln U_2}{\sqrt{(\ln U_1^2 - \ln U_1^2) \ln U_2^2 - \ln U_2^2}} \quad (8)$$

c. 对于指数回归: $U_2 = a \exp(bU_1)$ 取自然对数转换为线性函数得.

$$\ln U_2 = \ln a + bU_1 \quad (9)$$

由(3)(4)式可得

$$a = \exp(\ln U_2 - bU_1)$$

$$b = \frac{U_1 \cdot \ln U_2 - U_1 \ln U_2}{\ln U_1^2 - U_1^2} \quad (10)$$

$$r = \frac{U_1 \ln U_2 - U_1 \cdot \ln U_2}{\sqrt{(U_1^2 - U_1^2) \ln U_2^2 - \ln U_2^2}} \quad (11)$$

求出各函数相应的 a 和 b 值后, 可得出三种函数式, 把实验测得的各个自变量 U_1 分别代入三个基本函数, 得到相应因变量的预期值 U_2' . 根据 $r \rightarrow 1$ 情况就可以说明指数回归是最合适的, 由(2)式与指数式 $U_2 = a \exp(bU_1)$ 的指数相等可得: $eU/kT = bU$. 所以: $e/k = bT$, 即:

$$k = e/bT \quad (12)$$

可通过上式求出玻尔兹曼常数 k .

表2 $T = 345.15K$ 时数据处理表

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	波尔兹曼常数测定实验数据处理								
2	实验数据		线性回归	乘幂回归 $U_2 = aU_1^b$			指数回归 $U_2 = a \exp(bU_1)$		
3	$T_1 = 291.15K$		$U_2 = a + bU_1$	$(\ln U_2 = a + b * \ln U_1)$			$(\ln U_2 = a + b * U_1)$		
4	U_1/V	U_2/V	$U_2 * /V$	$\ln U_1$	$\ln U_2$	$U_2 * /V$	$\ln U_2$	$U_2 * /V$	
5	1	0.35	0.07	-2.129	-1.050	-2.659	0.061	-2.659	0.069
6	2	0.36	0.101	-1.394	-1.022	-2.293	0.096	-2.293	0.102
7	3	0.37	0.154	-0.660	-0.994	-1.871	0.151	-1.871	0.153
8	4	0.38	0.228	0.075	-0.968	-1.478	0.233	-1.478	0.227
9	5	0.39	0.336	0.810	-0.942	-1.091	0.357	-1.091	0.338
10	6	0.4	0.498	1.545	-0.916	-0.697	0.542	-0.697	0.504
11	7	0.41	0.736	2.280	-0.892	-0.307	0.812	-0.307	0.751
12	8	0.42	1.132	3.015	-0.868	0.124	1.206	0.124	1.118
13	9	0.43	1.674	3.750	-0.844	0.515	1.774	0.515	1.666
14	10	0.44	2.473	4.485	-0.821	0.905	2.587	0.905	2.481
15	11	0.45	3.65	5.220	-0.799	1.295	3.741	1.295	3.696
16	12	0.46	5.592	5.955	-0.777	1.721	5.366	1.721	5.505
17	13	0.47	8.299	6.690	-0.755	2.116	7.636	2.116	8.200
18	14	0.48	12.125	7.425	-0.734	2.495	10.7881	2.495	12.213
19	r		0.841504638		0.998927714			0.999972361	
20	a		-27.85232308		1.83E+06			6.04E-08	
21	b		73.49406593		16.40943172			39.84496063	
22	k		1.38093E-23						

2.2 应用 Excel 数据处理分析

本实验数据计算求解的工作量比较繁重, 而应用 Excel 软件处理分析即容易又直观. 主要应用

Excel 软件中的 INTERCEPT(求线性回归拟合线方程的截距)、SLOPE(求线性回归拟合线方程的斜率)、SUMPRODUCT(乘积的和)、SUMSQ(平方和)、POWER(乘幂)、LN(自然对数)、EXP(e 的乘幂)、SQRT(平方根)、SUM(求和)、等函数及公式功能。

表 1 与表 2 是用 Excel 软件编辑好的数据处理表,只需将实验测得的 T 、 U_1 、 U_2 值输入对应的 B3、B5、B18 及 C5、C18 单元格内,其它实验数据会自动求出。

简单介绍下数据表的编辑制作过程。本实验的关键在于 a 、 b 及 r 的求解计算,根据介绍的三种函数回归,可以计算出 a 、 b 和 r 的值,演算过程比较复杂。Excel 中有 INTERCEPT 和 SLOPE 两个函数能直接求出线性回归 a 、 b 值,乘幂回归和指数回归可通过(6)式与(9)式转化为线性回归,所以也可以通过 INTERCEPT 和 SLOPE 两个函数求出,但没有函数能直接求出 r 的值,必须通过输入公式的方法,可以对(4)式变形得,

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad (13)$$

a. 线性回归

a 值(图 1 中 D20 单元格)插入函数“= INTERCEPT(\$C\$5:\$C\$18,\$B\$5:\$B\$18)”

b 值(图 1 中 D21 单元格)插入函数“= SLOPE(\$C\$5:\$C\$18,\$B\$5:\$B\$18)”

r 值(图 1 中 D19 单元格)插入函数“= (14 * SUMPRODUCT(\$B\$5:\$B\$18,\$C\$5:\$C\$18) - SUM(\$B\$5:\$B\$18) * SUM(\$C\$5:\$C\$18))/SQRT((14 * SUMSQ(\$B\$5:\$B\$18) - SUM(\$B\$5:\$B\$18)^2) * (14 * SUMSQ(\$C\$5:\$C\$18) - SUM(\$C\$5:\$C\$18)^2))”

这里应用了 SUMPRODUCT(乘积的和)、SUMSQ(平方和)SQRT(平方根)、SUM(求和)等函数。

b. 乘幂回归

先应用 Excel 中的 LN 函数求出 U_1 和 U_2 的自然对数,见图 1 中 E5:E18 和 F5:F18。

a 值(图 1 中 E20 单元格)插入函数“= EXP(INTERCEPT(\$F\$5:\$F\$18,\$E\$5:\$E\$18))”

b 值(图 1 中 E21 单元格)插入函数“= SLOPE(\$F\$5:\$F\$18,\$E\$5:\$E\$18)”

r 值(图 1 中 E19 单元格)插入函数“= (14 * SUMPRODUCT(\$E\$5:\$E\$18,\$F\$5:\$F\$18) - SUM(\$E\$5:\$E\$18) * SUM(\$F\$5:\$F\$18))/SQRT((14 * SUMSQ(\$E\$5:\$E\$18) - SUM(\$E\$5:\$E\$18)^2) * (14 * SUMSQ(\$F\$5:\$F\$18) - SUM(\$F\$5:\$F\$18)^2))”

c. 指数回归

先应用 Excel 中的 LN 函数求出 U_2 的自然对数,见图 1 中 H5:H18。

a 值(图 1 中 H20 单元格)插入函数“= EXP(INTERCEPT(\$H\$5:\$H\$18,\$B\$5:\$B\$18))”

b 值(图 1 中 H21 单元格)插入函数“= SLOPE(\$H\$5:\$H\$18,\$B\$5:\$B\$18)”

r 值(图 1 中 H19 单元格)插入函数“= (14 * SUMPRODUCT(\$B\$5:\$B\$18,\$H\$5:\$H\$18) - SUM(\$B\$5:\$B\$18) * SUM(\$H\$5:\$H\$18))/SQRT((14 * SUMSQ(\$B\$5:\$B\$18) - SUM(\$B\$5:\$B\$18)^2) * (14 * SUMSQ(\$H\$5:\$H\$18) - SUM(\$H\$5:\$H\$18)^2))”

a 、 b 值求出后,就可以分别计算 U_2 ,根据 $r \rightarrow 1$ 情况可以确定指数回归是最适合的,将 a 、 b 、 T 值代入(12)式便可求出 k ,上面应用的函数可以通过 Excel 软件的帮助获得更多的相关信息。

另外应用 Excel 的图表功能,比较一下三种回归的拟合情况。分别选择 U_1 、 U_2 及回归的预期值 U_2 的数据区域,然后插入图表,选择折线图,就会得到各自的回归拟合图像,如图 3 所示。可以明显看出指万方数据

数回归拟合图像最接近重合。

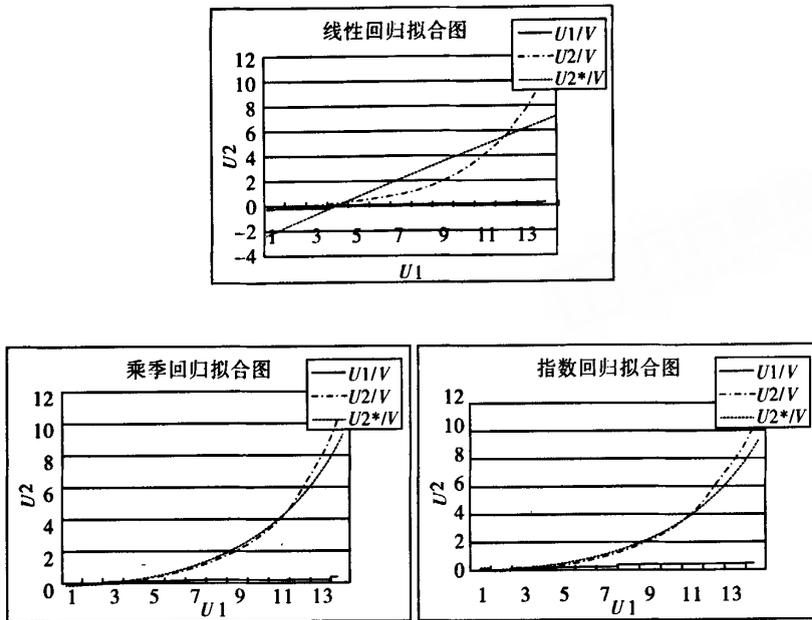


图1 三种回归拟合图

3 结论

图1与图2所示是在环境温度不同的条件下所测量求得的 k 值,并没受到影响^[4],与理论推导值 $k = 1.380662 \times 10^{-23} \text{J/K}$ 相对误差都在0.1%以内,较精确的计算出 k 值。两次的拟合指数均是 $r = 0.999997$ 。从而可以看出 U_2 与 U_1 之间能够很好地满足指数规律。同时采用Excel软件进行数据处理及图像拟合分析,使数据处理过程变得非常简单,也提高了数据计算的精度及制图的准确性。

参考文献:

- [1] 马黎君. 大学物理实验[M]. 中国建材工业出版社, 2004: 205 - 209.
- [2] 姜永超. 大学物理实验[M]. 北京: 中国农业大学出版社, 2006: 18 - 22.
- [3] 陆廷济. 物理实验教程[M]. 同济大学出版社, 2000, 26 - 27.
- [4] 崔廷军等. 利用PN结测量玻尔兹曼常数实验分析[J]. 物理与工程. 2007, 17(1): 31 - 33.

Bata processing method for Boltzmann's constant experiment

DONG Hai-kuan

(Department of Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, China)

Abstract: Based on the feature relations of electric current and voltage of P-N knot, the Boltzmann's constant is calculated precisely with three fit methods— linear regression method, power regression method, exponential regression, and disposal methods of the experimental data of Boltzmann's constant with Microsoft Excel is introduced to simplify the calculation and experiment.

Key words: Boltzmann's constant; data processing; linear regression; Microsoft Excel