第25卷第4期
2005年8月
辽 宁 工 学 院 学 报
Journal of Liaoning Institute of Technology
Vol. 25, No. 4
Aug. 2005

用分析法确定刚体的惯量主轴

韩 萍，佟丽媛
（渤海大学 物理系，辽宁 锦州 121003）

摘 要：刚体力学中，确定刚体的惯量主轴，可以简化计算，还有利于研究刚体的性质和运动规律，这样，如何确定刚体的惯量主轴就显得尤为重要。由惯量主轴的定义出发，经过严格的推导，得出用分析法确定惯量主轴的方法和步骤。这种方法适用范围广，具有普遍性，尤其是对没有明显对称性的问题更加适用。

关键词：刚体；转动惯量；惯量主轴；分析法
中图分类号：O313.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-1090(2005)04-0273-03

Confirming Principal Axis of Inertia of Rigid Body by Analytic Approach

HAN Ping, TONG Li-yuan
(Dept. of Physics, Bohai University, Jinzhou 121003, China)

Key words: rigid body; rotational inertia; principal axis of inertia; analytic approach

Abstract: In rigid body mechanics, confirming the principal axis of inertia of rigid body is particularly important, its calculation can be made to be simplified and favorable to study the nature and movement law of rigid body. The methods and steps of confirming the principal axis of inertia by analytic approach were presented, starting from the definition of the principal axis of inertia and through strict derivation. The method of using analytic approach to confirm the principal axis of inertia is suitable in extensive range, universal, and especially for those problems having no obvious symmetry.

惯量主轴就是惯量椭球的主轴，是刚体力学中的一个重要的概念，如果选取惯量主轴为坐标轴，就可以使惯量积为零，简化运算。另外，惯量主轴，特别是质心惯量主轴，还具有重要的力学性质。分析法是确定主轴的基本方法，适用范围广，具有普遍性。

1 物体对通过给定点 O 的任一轴的转动惯量

以给定点 O 为原点，取固定在刚体上的坐标系 O－XYZ，如图 1 所示。假定某一瞬时，转动瞬轴 L 的方向余弦为 α、β、γ. 则刚体上第 i 个点 P_i 的质量为 m_i，其坐标为 (x_i, y_i, z_i)，位矢量 $\overrightarrow{OP_i} = \vec{r}_i$，并设 $\vec{r}_i$ 与单位向量 $\vec{l}_i(\alpha, \beta, \gamma)$ 之间的夹角为 θ_i. 由 $\rho_i = r_i \sin\theta_i$，得：

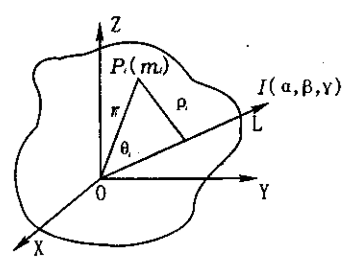

图 1 过 O 点任一轴的转动惯量

收稿日期：2005-03-09
作者简介：韩萍(1964-)，女，辽宁盖县人，副教授，硕士。

转动惯量 $I = \sum m_i\rho_i^2 = \sum m_i[(\beta^2+\gamma^2)x_i^2 + (\gamma^2+\alpha^2)y_i^2 + (\alpha^2+\beta^2)z_i^2 - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i] = \alpha^2\sum m_i(y_i^2+z_i^2) + \beta^2\sum m_i(z_i^2+x_i^2) + \gamma^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2) - 2\beta\gamma\sum m_i y_i z_i - 2\gamma\alpha\sum m_i z_i x_i - 2\alpha\beta\sum m_i x_i y_i$

若令

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &\equiv \sum m_i(y_i^2+z_i^2),\ I_{yz} \equiv \sum m_i y_i z_i \\
I_{yy} &\equiv \sum m_i(z_i^2+x_i^2),\ I_{zx} \equiv \sum m_i z_i x_i \\
I_{zz} &\equiv \sum m_i(x_i^2+y_i^2),\ I_{xy} \equiv \sum m_i x_i y_i
\end{aligned} \tag{1}
$$

就可以将物体对 L 轴的转动惯量简写为

$$
I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha - 2I_{xy}\alpha\beta \tag{2}
$$

对于式(1)所引入的各量的物理意义,当动坐标轴取定后,式(1)中的各物理量应被视为一组确定的常量。公式(2)便给出了通过给定点 O 任一转动瞬轴的转动惯量[1,2]。式中的 I_{xx},I_{yy},I_{zz}叫做刚体对 x 轴、y 轴、z 轴的轴转动惯量,I_{yz},I_{zx},I_{xy}称为物体对二正交平面的惯量积。

2 惯量椭球与惯量主轴

2.1 惯量椭球[2]

假定物体对任一轴 L(方向余弦为 α、β、γ)的转动惯量为 I,如果在 L 上取一点 P,如图 2 所示,使 OP 的长度满足

$$
\rho = \frac{1}{\sqrt{I}} \tag{3}
$$

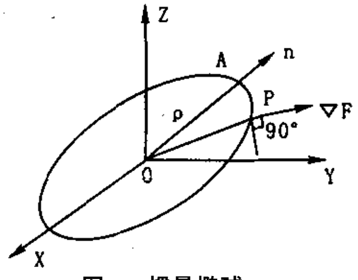

图 2 惯量椭球

则 P 点的坐标为

$$
x = \alpha\rho,\ y = \beta\rho,\ z = \gamma\rho
$$

现在由上式解出 α、β、γ 后代入 I 的表示式(2)中,并将 ρ 的值用式(3)代换,结果便得

$$
I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz} - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1 \tag{4}
$$

若命函数 F 满足

$$
2F(x,y,z) = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz} - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy \tag{5}
$$

式(4)可简写为

$$
2F(x,y,z) = 1 \tag{6}
$$

这就是决定 P 点位置的轨迹方程。因为 $I\neq 0$,故 $\rho\neq\infty$,是一个中心在 O 点的椭球面,称为物体对 O 点的惯量椭球。

2.2 惯量主轴[2]

物体对于每一点 O 都有一个惯量椭球,每一个椭球都有三条相互垂直的主轴。如果以此三主轴为坐标轴,而惯量积 I_{yz},I_{zx},I_{xy}则统统等于零。故选取惯量主轴为坐标轴,问题就能得到简化。惯量椭球的主轴叫惯量主轴,而对惯量主轴的转动惯量叫主转动惯量,并改以 I_1,I_2,I_3 表示。

3 惯量主轴的确定

采用分析法确定刚体的惯量主轴,根据的事实是,对惯量主轴来讲,椭球与主轴交点的位矢的方向和椭球上该点的法线方向重合,采用线性代数里求本征值的方法[3]确定惯量主轴的方向或惯量椭球面上顶点坐标。

3.1 特征方程的得出

如图 3 在椭球面上,设任一个点 P 的坐标是(x,y,z),该点的位矢为 $\vec{R}$,法线方向为 $\vec{n}$. 由解析几何知,在椭球面上,只有顶点出的法线 $\vec{n}$ 才与该点的位矢 $\vec{R}$ 的方向重合,而方程(6)所表示的惯量椭球上任一点 P 的法线方向与其梯度向量∇F 的方向一致,因此,顶点坐标应满足的条件是$\nabla F /\!/ \vec{R}$[4]

或者 $\nabla F(x,y,z) = \lambda\vec{R}$

其中,λ 为待定系数。上式的投影方程为

$$
\partial F/\partial x = \lambda x,\ \partial F/\partial y = \lambda y,\ \partial F/\partial z = \lambda z \tag{7}
$$

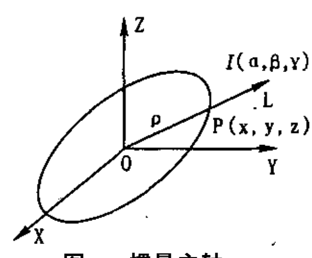

图 3 惯量主轴

由式(5)得

$$
\begin{aligned}
\partial F/\partial x &= I_{xx}x - I_{xy}y - I_{zz}z \\
\partial F/\partial y &= -I_{xy}x + I_{yy}y - I_{yz}z \\
\partial F/\partial z &= -I_{zx}x - I_{yz}y + I_{zx}z
\end{aligned}
$$

代入式(7),由于 $I_{ik}\equiv I_{ki}(i,k=x,y,z)$,可得

$$\begin{cases} I_{xx}x - I_{xy}y - I_{xz}z = \lambda x \\ -I_{xy}x + I_{yy}y - I_{yz}z = \lambda y \\ -I_{zx}x - I_{yz}y + I_{zz}z = \lambda z \end{cases} \tag{8}$$

此线性方程组可以表示成下列形式

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

即 $IR=\lambda R$，其中，λ 是惯量张量 I 的特征值，R 是 I 属于 λ 的特征向量，I 即是物体惯量张量，这就是惯量椭球面上顶点坐标所应满足的条件。式(8)具有非零解的条件是 $|E\lambda-I|=0$[3]，即

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy}-\lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

这是对 λ 的一个三次方程，称为 I 的特征方程。

3.2　主转动惯量

由式(9)可以解出 λ 的三个特征根，以 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 表示。将三个根分别带回式(8)便确定三个特征向量

$$\begin{cases} R_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ R_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ R_3 = (x_3, y_3, z_3) \end{cases}$$

这三个特征向量满足式(7)，即这三个方向与该点的法线同向，称这三个方向为惯量主轴方向。

可证明这三个特征向量相互正交，即这三个特征方向相互垂直，如果取这三个方向为坐标轴，惯量积为零，则特征方程(9)变为

$$\begin{vmatrix} I_x-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & I_y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_z-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

所以，特征方程的三个根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 实际上就是 O 点的主转动惯量。一般情况下 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，所以 $I_1\neq I_2\neq I_3$，此时，惯量椭球存在惟一的一组相互垂直的 3 个惯量主轴。

另外，如果 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，那么主转动惯量 $I_1=I_2\neq I_3$，此时，惯量椭球为一旋转椭球，所有赤道面内的轴均为惯量主轴，转动惯量均为 I_1.

如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，那么主转动惯量 $I_1=I_2=I_3$. 此时，惯量椭球退化为球面，过 O 点的任何轴均为惯量主轴，转动惯量也相同。

4　结束语

用分析法确定刚体的惯量主轴的过程实际上就是矩阵对角化的过程。由于惯量张量是实对称矩阵，所以一定可以对角化，也就是说，任何刚体上任一点都存在惯量主轴。这就从数学上说明了用分析法确定惯量主轴具有普遍性的原因。分析法给出了一般情况下，求物体惯量主轴的方法。

参考文献：

[1]陈世民. 理论力学简明教程[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[2]周衍柏. 理论力学教程(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，1986.

[3]李永乐. 线性代数[M]. 北京：北京大学出版社，2000.

[4]朱鼎勋，陈绍菱. 空间解析几何[M]. 北京：北京大学出版社，1984.

责任编校：孙　林

(上接第 246 页)于建立的模型是简化模型，只在线性内进行匹配，实际上悬架刚度和悬架阻尼尤其悬架阻尼具有很强的非线性，同时路面激励的不同也影响最终结果。

4　结　论

(1)匹配后汽车的平顺性较好，仿真结果与实验相吻合，从而验证了仿真的可靠性和正确性。

(2)理论计算匹配参数值范围和利用 SIMPACK 软件搭建模型仿真试验相结合的匹配方法简单、高效。

(3)改变悬架刚度用来改变车身固有频率，改变悬架阻尼可以调整整车振动的强度；悬架刚度值一定，悬架阻尼值增大，则座椅加速度功率谱中车身振动幅值在变小，车桥幅值增大，从而验证了汽车平顺性和操纵稳定性是相对立的。

参考文献：

[1]余志生. 汽车理论[M]. 第 2 版. 北京：机械工业出版社，1999. 169－183.

[2]容一鸣，阳杰. 车辆随机输入的动态仿真和实验研究[J]. 汽车工程，2001，23(5)：349－351.

[3]邹晓华，张立军，郑春娇. 车辆悬架系统振动仿真[J]. 辽宁工学院学报，2004，24(2)：39－40.

[4]俞德孚. 被动悬架可行设计区及其等效匹配阻尼设计[J]. 兵工学报. 坦克装甲车与发动机分册，1997，(3)：58－64.

[5]傅秀通. 专家级动力学分析软件——SIMPACK[J]. CAD/CAM 与制造业信息化，2004，(3)：69－70.

责任编校：刘亚兵