第28卷第2期
2008年4月
辽宁工业大学学报
Journal of Liaoning University of Technology
Vol.28,No.2
Apr. 2008

耦合摆小振动问题的研究

韩　萍
（渤海大学 物理系，辽宁 锦州　121013）

摘　要：利用保守系的拉格朗日方程，给出了耦合摆在平衡位置附近的动力学方程，求解出耦合摆在平衡位置附近作小振动时的本征频率。并对耦合摆的振动坐标作适当的线性组合，得出了简正坐标和简正振动频率。

关键词：拉格朗日方程；小振动；耦合摆；简正坐标
中图分类号：O313.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-1090(2008)02-0138-03

Study of Small Oscillation of Couple Pendulum

HAN Ping
(Physics Department, Bohai University, Jinzhou 121003, China)

Key words: Lagrange equation; small oscillation; couple pendulum; normal coordinate

Abstract: The dynamic equations of the couple pendulum near the balance location were given by using Lagrange equation. The eigenfrequency of small oscillation of the couple pendulum near the balanced location was also solved. The normal coordinates and normal oscillation frequency were gained by making adaptablely linear combination with oscillation coordinates of couple pendulum.

力学系统大多是较为复杂的非线性系统，不太可能对其运动得出完整的一般解。作为求解的试探，常常是对相对于系统的平衡位置有微小偏离的运动求解。耦合摆由两个单摆通过一弹簧相连构成，关于耦合摆的小振动在力学教材中曾求解过[1~3]，而且简正坐标的求法不少文献作了讨论[4]，但求解过程较繁。本文利用分析力学的拉格朗日方程，求解了耦合摆在平衡位置附近作小振动时的情况，给出了处理耦合摆小振动的一种较简单适用的方法。虽然只是两个自由度的力学体系，但它包含了处理非线性力学系在平衡位置附近作小振动的主要过程。

1　耦合摆

如图1所示，耦合摆由两个相同的单摆平行悬挂，两个摆锤之间用一轻质弹簧相连构成。设摆锤的质量为m；摆长为l；弹簧劲度系数为k；弹簧的质量忽略不计。

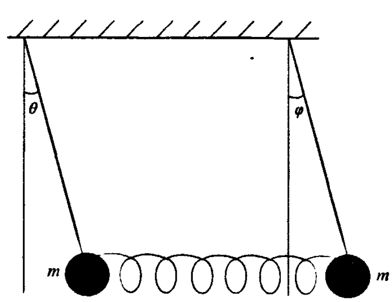

图1　耦合摆示意图

2　耦合摆的小振动

如图1，设耦合摆在自身的铅直平面内作微小摆动，两个摆锤摆动的角度分别为θ和φ，这两个独立变量确定了系统的位形，可作为系统的广义坐标。显然二摆都竖直下垂时，系统处于能量最小的平衡状态，即θ及φ等于零时的状态。这是两个自由度的较为简单的力学系。

收稿日期：2007-10-09
作者简介：韩萍(1964-)，女，辽宁盖县人，副教授，硕士。

2.1 系统的动能和势能

动能
$$T=\frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2) \tag{1}$$

势能
$$V(\theta,\varphi)=mgl[(1-\cos\theta)+(1-\cos\varphi)]+\frac{k}{2}l^2(\sin\theta-\sin\varphi)^2 \tag{2}$$

在小振动的情形下，θ 和φ都是很小的量，可以对势能 $V(\theta,\varphi)$在系统平衡位置附近展开，保留到θ,φ 的二次项。且在平衡位置附近处$\theta=\varphi=0$，则

$$V(\theta,\varphi)=V(0)+\left(\left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_0\theta+\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_0\varphi\right)+\frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_0\theta^2+2\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi}\right|_0\theta\varphi+\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_0\varphi^2\right)+\cdots$$

小振动时系统的势能函数近似为
$$V(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}mgl(\theta^2+\varphi^2)+\frac{k}{2}l^2(\theta^2-2\theta\varphi+\varphi^2) \tag{3}$$

2.2 耦合摆的动力学方程

系统作小振动时的拉格朗日函数
$$L=T-V=\frac{1}{2}ml(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)-\frac{1}{2}mgl(\theta^2+\varphi^2)-\frac{k}{2}l^2(\theta^2-2\theta\varphi+\varphi^2) \tag{4}$$

将 L 代入拉格朗日方程得动力学方程
$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)\theta-\frac{k}{m}\varphi=0\\ \ddot{\varphi}-\frac{k}{m}\theta+\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)\varphi=0\end{cases} \tag{5}$$

2.3 方程的解

假设方程(5)具有振动类型的解
$$\theta=A_\theta e^{i\omega t}$$
$$\varphi=A_\varphi e^{i\omega t}$$

将其代入式(5)，可得关于 A_θ、A_φ 的齐次代数方程组
$$\begin{cases}\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2\right)A_\theta-\frac{k}{m}A_\varphi=0\\ -\frac{k}{m}A_\theta+\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2\right)A_\varphi=0\end{cases} \tag{6}$$

A_θ、A_φ 具有非零解的必要条件是它们的系数行列式为零，即
$$\begin{vmatrix}\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

求得
$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=-\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_3=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}},\quad \omega_4=-\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

这些频率都只与耦合摆自身装置的参量(m,l,k)有关，因而称为耦合摆的固有频率。将某一本征值ω_α代入式(6)，就可求出与之相应的常数 $A_\theta^{(\alpha)}$ 和 $A_\varphi^{(\alpha)}$. 然而这两个系数不是独立的，可解出它们的比值。

令
$$\omega=\omega_1=-\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega'=\omega_3=-\omega_4=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

则微分方程组式(5)的一般解可写成如下线性组合形式：

$$\begin{cases}\theta = A_\theta^{(1)} e^{i\omega t} + A_\theta^{(2)} e^{-i\omega t} + A_\theta^{(3)} e^{i\omega' t} + A_\theta^{(4)} e^{-i\omega' t} \\ \varphi = A_\theta^{(1)} e^{i\omega t} + A_\theta^{(2)} e^{-i\omega t} - A_\theta^{(3)} e^{i\omega' t} - A_\theta^{(4)} e^{-i\omega' t}\end{cases} \tag{7}$$

式(7)中解的四个组合系数 $A_\theta^{(1)}$、$A_\theta^{(2)}$、$A_\theta^{(3)}$ 和 $A_\theta^{(4)}$ 可由初始条件决定。

3 简正坐标

耦合摆的摆动相互关联着，不是独立的。原因是势能表达式(3)中存在 θ 和 φ 的乘积项。进一步探讨则发现，只要对两个摆的振动坐标 (θ,φ) 作适当的线性组合，成为新的广义坐标参量，就可以使动能表达式仍保持为广义速度平方和的形式，同时又能使势能函数中也不出现广义坐标的交叉(乘积)项。对上面所讨论的耦合摆来说，这种坐标变换不难得到。若令

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + \varphi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - \varphi) \tag{8}$$

将此坐标(参量)变换关系代入式(4)，得出拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{2}mgl\xi^2 - \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\eta^2$$

这样，拉氏函数都只包含广义速度及广义坐标的平方项，不再存在交叉乘积项。这是两个独立振子的拉格朗日函数。相应的动力学方程为

$$\begin{cases}\ddot{\xi} = -\dfrac{g}{l}\xi \\ \ddot{\eta} = -\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}\right)\eta\end{cases} \tag{9}$$

此为两个独立的简谐运动微分方程，其解为两个独立的简谐振动

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \eta = \eta_0 \cos(\omega' t + \beta) \tag{10}$$

式中：ξ_0、η_0、α 和 β 都是积分常数，由初始条件确定；ω、ω' 如前所述。

这两个独立简谐运动分别代表以不同的本征频率振动的两个独立振动模式。这些独立的简谐振动模式称为体系的简正振动，简正振动的频率是体系的本征频率，称为简正频率，与简正振动相对应的广义坐标称为简正坐标。

4 结　论

通过对耦合摆在平衡位置附近的小振动问题的研究及求解耦合摆小振动的过程，提出了一种用分析力学中的拉格朗日方程来处理复杂问题的方法；明确了耦合摆的小振动既可以从两个摆的振动 $\theta(t)$ 和 $\varphi(t)$ 去研究，也可以分解成两种独立简谐振动模式来讨论。

参考文献：

[1] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京：高等教育出版社, 2004.
[2] 郭士堃. 理论力学[M]. 北京：高等教育出版社, 1984.
[3] 金尚年, 马永利. 理论力学[M]. 北京：高等教育出版社, 2001.
[4] 楼智美. 多自由度线性微幅振动系统简正坐标的一般求法[J]. 大学物理, 2004, 23(7): 3-7.

责任编校：孙　林