第28卷第3期　　渤海大学学报(自然科学版)　　Vol. 28 No. 3
2007年9月　　Journal of Bohai University (Natural Science Edition)　　Sep. 2007

量子谐振子与经典谐振子的比较

韩　萍,李菲菲

(渤海大学 物理系,辽宁 锦州 121013)

摘　要:在 Heisenberg 表象,通过引入升降算符求解了量子谐振子,计算了任意初态情况下坐标、动量、动能、势能和哈密顿量的期望值,并同经典谐振子的相应力学量进行了比较,得出了量子谐振子只能在一定条件下趋近于经典谐振子而不可能等同。

关键词:经典谐振子;量子谐振子;Heisenberg 表象

中图分类号:O413　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-0569(2007)03-0260-02

谐振子问题既是经典力学,又是量子力学中的一个基本问题。它不仅在量子原理上十分典型和重要,而且应用非常广泛,涉及分子、固体物理、量子场论和量子光学等领域。因此,几乎所有的量子力学教课书都在坐标表象中通过求解微分方程方法对一维谐振子进行了详细求解。本文将在 Heisenberg 表象,通过引入升降算符求解谐振子,求出力学随时间的演化,并对任意初态情况下坐标、动量、动能、势能和哈密顿量的期望值同经典谐振子的相应力学量进行了比较给出了量子谐振子趋近经典极限的条件。

1　升降算符 a^+ 与 a 的引入

一维谐振子的 Hamilton 量为 $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}M\omega^2x^2$

令 a、a^+、x、p 和 H 间有如下关系

$$x=(\frac{h}{2m\omega})^{\frac{1}{2}}(a^++a) \tag{1}$$

$$p=i(\frac{m\omega h}{2})^{\frac{1}{2}}(a^+-a) \tag{2}$$

$$H=\frac{1}{2m}P^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=(a^+a+\frac{1}{2}H\omega \tag{3}$$

则有 $[a,a^+]$,$[a,H]=ah\omega$,$[a^+,H]=-a^+h\omega$　　(4)

2　谐振子在 Heisenberg 表象

2.1　力学量随时间的演化

在 Heisenberg 表象中,变换为

$$a(t)=e^{iHt/h}de^{-iHt/h} \tag{5}$$

$$a^+(t)=e^{iHt/h}a^+de^{-iHt/h}=[a(t)]^+ \tag{6}$$

式(5)对 t 求导,并利用对易式(4),即得方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)=\frac{i}{h}e^{iHt/h}[H,a]e^{-iHt/h}=-i\omega a(t) \tag{7}$$

解为 $a(t)=a(0)e^{-i\omega t}=\mathrm{d}e^{-i\omega t}$　　(8)

再取共轭,即得 $a^+(t)=a^+e^{i\omega t}$　　(9)

将式(1)、(2)换成 Heisenberg 表象,即得

收稿日期:2007-05-17.

作者简介:韩萍(1963-),女,副教授,从事理论物理教学科研工作。

$$x(t)=(\frac{h}{2m\omega})^{\frac{1}{2}}[a(t)+a^{+}(t)]=(\frac{h}{2m\omega})^{\frac{1}{2}}(de^{-i\omega t}+a^{+}e^{i\omega t})=x\cos\omega t+\frac{p}{m\omega}\sin\omega t \tag{10}$$

$$p(t)=i(\frac{m\omega h}{2})^{\frac{1}{2}}[a^{+}(t)-a^{+}(t)]=i(\frac{m\omega h}{2})^{\frac{1}{2}}(a^{+}e^{i\omega t}-ae^{-i\omega t})=p\cos\omega t-xm\omega\sin\omega t \tag{11}$$

即中 x 即 $x(t=0)$,P 即 $P(t=0)$,(10)、(11)在经典力学中也是成立的。

3 与经典谐振子的比较

3.1 坐标和动量的期望值分别为

$$\langle x\rangle_t=<x>_0\cos\omega t+\frac{<p>_0}{m\omega}\sin\omega t=\bar{A}\cos(\omega t+\varphi) \tag{12}$$

$$\langle P\rangle_t=-m\omega<x>_0\sin\omega t+<p>_0\cos\omega t=-m\bar{A}\omega\sin(\omega t+\varphi) \tag{13}$$

式中:$\bar{A}=\sqrt{(<x>_0)^2+(\frac{<p>_0}{m\omega})^2}$,$tan\varphi=-\frac{<p>_0}{m\omega\langle x\rangle_0})$

3.2 势能和动能的期望值分别为

$$\langle E_p\rangle_t=\frac{1}{2}m\omega^2\{\bar{A}^2\cos^2(\omega t+\varphi)+[\Delta x(t)]^2\} \tag{14}$$

$$\langle E_k\rangle_t=\frac{1}{2}m\omega^2\{\bar{A}^2\sin^2(\omega t+\varphi)+[\frac{\Delta p(t)}{m\omega}]^2\} \tag{15}$$

其中:$[\Delta x(t)]^2=<(x-<x>_t)^2>_t=<[x(t)-<x(t)>_0]^2>_0$

$[\Delta p(t)]^2=<p-<p>_t)^2>_t=<[p(t)-<p(t)>_0]^2>_0$

哈密顿量的期望值为$\langle H\rangle^t=\frac{1}{2}m\omega^2\bar{A}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\{[\Delta x(t)]^2+[\frac{\Delta p(t)}{m\omega}]^2\}$ (16)

4 结论

在 Heisenberg 表象,若将,φ 分别视为振幅和初相位,则坐标和动量期望值随时间的变化与经典谐振子的坐标和动量的变化规律相同;势能、动能及哈密顿量的期望值同经典谐振子的差别取决于坐标和动量的不确定程度。因此,量子谐振子只能在一定条件下趋近于经典谐振子而不可能完全等同。

参考文献:

[1] 张永德, 量子力学[M]. 北京:科学出版社, 2002.
[2] 周世勋, 量子力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
[3] 曾谨言, 量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

Comparison of quantum harmonic oscillator and classical harmonic oscillator

HAN Ping, LI Fei-fei

(Department of Physics, Baohai University, Jinzhou121013, China)

Abstract: The harmonic oscillator was solved in the Heisenberg representation by introducing raising operator and lowering operator. The expectation values of coordinates, momentum, kinetic energy, the potential energy and Hamilton quantity were calculated under any initial state. And these expectation values were compared with corresponding mechanical quantity of the classical harmonic oscillator. It is concluded that the quantum harmonic oscillator tends to the classical limit only in certain condition, but they are not identical.

Key words: classical harmonic oscillator; quantum harmonic oscillator; Heisenberg representation